Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

Université Kasdi Merbah – Ouargla

Institut de technologie

2018/2019

جامعة قاصدي مرباح – ورقلة

معهد التكنولوجيا

Examen Final-S1- Mécanique générale / 1ière Année HSE

Exercice 01 : (06pts)

Soit un vecteur $\vec{A}$ défini par : $\vec{A} = (2.x.y + z^3)\,\vec{i} + (x^2 + 2.y)\,\vec{j} + (3.x.z^2 - 2)\,\vec{k}$

1- Calculez div $(\vec{A})$

2- Montrez que $\overrightarrow{Rot}\,\vec{A}$ est nulle.

3- Calculez $\overrightarrow{grad}$ B, telle que $B = x^2 y + z^3 x + y^2 - 2z$, qu'est-ce que vous trouvez ?

Exercice 02 : (08pts)

Soient $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $\Re'(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\Theta,\vec{k})$ le repère cylindrique muni de la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\Theta,\vec{k})$. Considérons un point matériel M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) et cylindriques (ρ,Θ,z).

1) Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans les deux repères $\Re$ et $\Re'$.

2) Déterminer les expressions de x, y et z en fonction de ρ, Θ et z.

3) Déterminer les expressions de ρ, Θ et z en fonction de x, y et z.

4) Déterminer les expressions des vecteurs de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en fonction de celles de la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\Theta,\vec{k})$.

Exercice 03 : (06pts)

L'équation en coordonnées polaires de M est : $\rho = 2b\cos(\Theta)$

Avec $\Theta = \omega t/2$, où b et ω sont constantes positives.

1- Calculer la vitesse $\vec{V}$ et son module.

2- Déterminer les coordonnées cartésiennes x et y en fonction de l'angle Θ

3- Calculer l'accélération γ et son module.

Dr. Achouri Abderrahim

Institut de technologie - Ouargla -

1ère Année HSE

2018/2019

Corrigé type d'examen S_1

de Mécanique générale

Exercice 01 : (10 pts)

$$\vec{A} = (2xy + z^3)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

1- $div(\vec{A}) = \frac{\partial(2xy+z^3)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2+2y)}{\partial y} + \frac{\partial(3xz^2-2)}{\partial z}$

$$= 2y + 2 + 6xz$$

$$\Rightarrow \boxed{div(\vec{A}) = 2y + 2 + 6xz}$$

2- $\vec{Rot}(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z^3 & x^2+2y & 3xz^2 \end{vmatrix}$

$$= (0-0)\vec{i} - (3z^2 - 3z^2)\vec{j} + (2x - 2x)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Rot}(\vec{A}) = \vec{0}}$$

3- On a : $B = x^2y + z^3x + y^2 - 2z$

$$\vec{grad}B = \frac{\partial B}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial B}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial B}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{grad}\,B = (2xy + z^3)\vec{i} + (x^2+2y)\vec{j} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{grad}\,B = \vec{A}}$$

Exercice 02 : (08 pts)

1 - * le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

** le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{R}(O, \vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{k}$$

2 - les expressions de x, y et z en fonction de ρ, θ et z

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

3 - les expressions de ρ, θ et z en fonction de x, y et z

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

4 - les expressions de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\,\vec{e_\rho} - \sin\theta\,\vec{e_\theta} \\ \vec{j} = \sin\theta\,\vec{e_\rho} + \cos\theta\,\vec{e_\theta} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Exercice 03 : (06 pts)

On a : $\rho = 2b\cos\theta$ et $\theta = \omega t/2$

1- la vitesse $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\vec{u}}_\rho \quad / \ \vec{u}_\rho = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ et } \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{V} = -2b\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_\rho + 2b\cos\theta\cdot(\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

$$= 2b\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = \omega b(-\sin\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)}$$

le module de $\vec{V}$ est : $\boxed{\|\vec{V}\| = 2b\dot{\theta} = \omega b}$

2- x et y en fonction de θ :

On a : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2b\cos\theta \\ y = 2b\cos\theta\sin\theta \end{cases}$

3- l'accélération $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d[\omega b(-\sin\theta\,\vec{u}_\rho + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)]}{dt}$$

$$= \omega b[-\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_\rho - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_\theta - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_\theta - \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_\rho]$$

$$= \omega b\dot{\theta}[-2\cos\theta\,\vec{u}_\rho - 2\sin\theta\,\vec{u}_\theta]$$

$$= -2\omega b\frac{\omega}{2}[\cos\theta\,\vec{u}_\rho + \sin\theta\,\vec{u}_\theta]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = b\omega^2(\cos\theta\,\vec{u}_\rho + \sin\theta\,\vec{u}_\theta]}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{\gamma}\| = b\omega^2}$$